

Teoria Miary i Całki

Bartosz Kwaśniewski

Faculty of Mathematics, University of Białystok

Wykład 3

Ciągłość miary. Przykłady miar

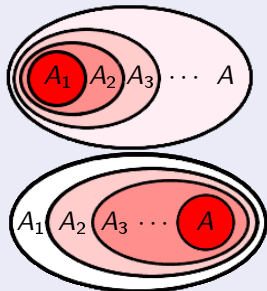
Def. Powiemy, że ciąg zbiorów $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ jest

- **wstępujący** jeśli $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \dots$

i wtedy piszemy $A_n \nearrow A$, gdzie $A := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$

- **zstępujący** jeśli $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \dots$

i wtedy piszemy $A_n \searrow A$, gdzie $A := \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$



Stw. (Ciągłość miary) Każda miara μ jest

- 1 ciągła z dołu, tzn. dla każdego ciągu $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{F}$

$$A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \dots \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)$$

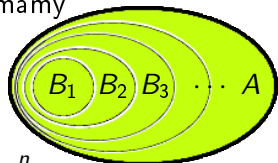
- 2 μ jest ciągła z góry na zbiorach o mierze skończonej, tzn. dla każdego $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{F}$ takiego, że $\mu(A_n) < \infty$ mamy

$$A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \dots \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right)$$

$$\mu(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) \quad \text{jeśli } A_n \nearrow A \text{ lub } A_n \searrow A \text{ oraz } \mu(A_n) < \infty$$

Dowód: (1) Niech $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, gdzie $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \dots$ zbiory z \mathcal{F} .
 Kładąc $B_1 := A_1$ oraz $B_n := A_n \setminus A_{n-1}$ dla $n > 1$, mamy

$$\{B_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{F} \text{ parami rozłączne oraz } A = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} B_n$$

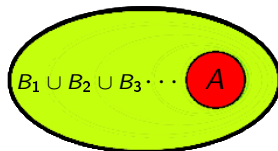


Zatem

$$\mu(A) \stackrel{\sigma\text{-add}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \mu(B_k) \stackrel{\text{add}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \mu\left(\bigsqcup_{k=1}^n B_k\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n)$$

(2) Niech $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$, gdzie $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \dots$ zbiory z \mathcal{F} , $\mu(A_1) < \infty$.
 Kładąc $B_n := A_1 \setminus A_{n+1}$ dla $n \geq 1$ mamy $B_1 \subseteq B_2 \subseteq B_3 \subseteq \dots$ oraz

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_1 \setminus A_{n+1} \stackrel{\text{De Morgan}}{=} A_1 \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{n+1} = A_1 \setminus A.$$



Zatem

$$\mu(A_1 \setminus A) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) \stackrel{(1)}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(B_n) \stackrel{\text{różn}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_1) - \mu(A_{n+1}).$$

Z drugiej strony $\mu(A_1 \setminus A) \stackrel{\text{różn}}{=} \mu(A_1) - \mu(A)$. Stąd $\mu(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n)$. ■

Tw. (σ -addytywność vs skończona addytywność)

Dla skończenie addytywnej funkcji $\mu : \mathcal{F} \rightarrow [0, \infty]$ na σ -algebrze \mathcal{F} następujące warunki są równoważne

- 1 μ jest σ -addytywna
- 2 μ jest ciągła z dołu

$$\sigma\text{-addytywność} = \text{skończona addytywność} + \text{ciągłość}$$

- 3 μ jest σ -poddaddytywna, tzn. $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$
dla każdego $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{F}$.

Jeśli $\mu < \infty$, to powyższe warunki są równoważne następującym

- 4 μ jest ciągła z góry
- 5 μ jest ciągła w \emptyset , tzn. $A_n \searrow \emptyset \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = 0$.

Dowód: Z poprzedniego dowodu (1) \implies (2) oraz (2) \implies (4) jeśli $\mu < \infty$. Implikacja (4) \implies (5) jest jasna, bo skończona addytywność oraz $\mu \neq \infty$ implikują, że $\mu(\emptyset) = 0$.

Reszta i szczegóły



i/lub



i/lub



Przykłady miar

Miara Diraca = probabilistyczna miara skupiona w jednym punkcie.

Dla dowolnej przestrzeni mierzalnej (X, \mathcal{F}) i $x \in X$ mamy miarę

$$\delta_x(A) := \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}, \quad A \in \mathcal{F}.$$



Miara licząca = moc zbioru. Na $(X, 2^X)$ mamy miarę

$$\mu(A) := \begin{cases} |A|, & \text{gdy } A \text{ jest zbiorem skończonym} \\ \infty, & \text{gdy } A \text{ jest zbiorem nieskończonym} \end{cases}$$

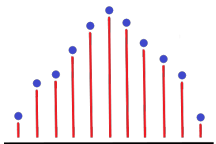
$$\mu = \sum_{x \in X} \delta_x$$



Dyskretna miara probabilistyczna = " $p_1, p_2, \dots \in [0, 1]$ oraz $\sum_i p_i = 1$ "

Na zbiorze $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots\}$ wzór $P = \sum_i p_i \delta_{\omega_i}$

$$P(A) := \sum_{\omega_i \in A} p_i$$



definiuje miarę (prawdopodobieństwo) $P : 2^\Omega \rightarrow [0, 1]$.

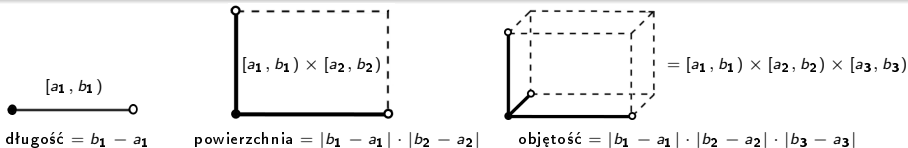
Uw. Jeśli $\{\mu_i\}_{i \in I}$ miary na (X, \mathcal{F}) oraz $\{\alpha_i\}_{i \in I} \subseteq [0, +\infty]$,

wzór $(\sum_{i \in I} \alpha_i \mu_i)(A) := \sum_{i \in I} \alpha_i \mu_i(A)$ definiuje miarę na \mathcal{F}

konwencja

$$0 \cdot \infty = 0$$

Miara Lebesgue'a = „długość, powierzchnia, objętość n -wymiarowa”



Tw. Istnieje dokładnie jedna miara λ^n na σ -ciele $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ taka, że

$$\forall_{\substack{a_i, b_i \in \mathbb{R} \\ a_i < b_i}} \lambda^n([a_1, b_1) \times [a_2, b_2) \times \dots \times [a_n, b_n)) = \prod_{i=1}^n |b_i - a_i|$$



„objętość prostopadłościanu jest iloczynem długości krawędzi go rozpinających.”

Def. Miarę λ^n z powyższego twierdzenia nazywamy n -wymiarową miarą Lebesgue'a, lub n -wymiarową objętością. ($\lambda := \lambda^1$ to **długość**)

Uw. Ciągłość miary pozwala obliczać λ^n dla różnych brył. Na przykład

$$\lambda^n(\text{półotwarty}) = \lambda^n(\text{domknięty}) = \lambda^n(\text{otwarty})$$

The equation shows three representations of a rectangular prism: a dashed wireframe (półotwarty), a solid shaded box (domknięty), and a dashed wireframe with a different perspective (otwarty).



Prz. 1) Każdy zbiór jednoelementowy na prostej \mathbb{R} ma zerową długość:

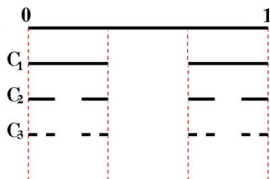
$$\lambda(\{a\}) = \lambda\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} [a, a + 1/n)\right) \stackrel{\text{ciągłość}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda([a, a + 1/n)) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} 1/n = 0$$

2) Każdy przeliczalny podzbiór \mathbb{R} ma zerową długość.

(przeliczalna suma zbiorów o mierze zerowej ma miarę zero)

3) Zbiór Cantora $C = \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n$ jest nieprzeliczalny, ale też ma zerową długość:

$$\lambda(C) \stackrel{\text{ciągłość}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(C_n) \stackrel{\text{def+add}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n \cdot 1/3^n = 0$$



Uwaga

Paradoks Banacha-Tarskiego



pokazuje, że miary Lebesgue'a nie da się określić na wszystkich podzbiorach \mathbb{R}^n .

Dlatego ograniczamy się do σ -algebry zbiorów borelowskich (jesteśmy zmuszeni)!

Uwaga

Istnienie i jednoznaczność miary Lebesgue'a wynika z:

- Twierdzenie o Istnieniu Miary (Caratheodory'ego)
- Twierdzenie o Jednoznaczności Miary (Dynkina)